

---

# ANAMORPHOSE PAR TRANSFORMATIONS PSEUDO-EQUIVALENTES<sup>1</sup>

APPLICATION A LA CARTOGRAPHIE THEMATIQUE

Patrice Langlois, UMR IDEES CNRS 6063, Laboratoire MTG  
[Patrice.Langlois@univ-rouen.fr](mailto:Patrice.Langlois@univ-rouen.fr)

---

**RÉSUMÉ.** Nous présentons une transformation cartographique permettant d'agrandir ou de rétrécir les zones d'une carte en fonction des valeurs d'une variable descriptive associée. Nous souhaitons que cette transformation possède des propriétés spatiales clairement explicitées, tout en donnant des résultats visuels acceptables. Ainsi, nous avons défini une classe de fonctions polaires élémentaires qui conservent les surfaces, sauf au voisinage du pôle de déformation, c'est la propriété de pseudo-équivalence. Ensuite nous avons défini une opération de combinaison de ces transformations élémentaires, la "composition progressive" qui est commutative (c'est-à-dire indépendante de l'ordre d'application des transformations élémentaires) et qui préserve la propriété de pseudo-équivalence. Nous présentons enfin quelques cartes thématiques déformées, de manière à ce que les surfaces des zones deviennent proportionnelles aux valeurs descriptives associées. Nous analysons les avantages et les inconvénients des différents choix de fonctions envisagés.

**MOTS-CLÉS :** anamorphose, transformation cartographique, cartographie thématique, carte, modèle spatial, visualisation.

*TITLE: Anamorphosis by pseudo-equal-area transformation. Application to the thematic cartography.*

*ABSTRACT: We present a cartographic transformation allowing an enlargement or narrowing of the areas of a map according to the values of an associated descriptive variable. We try to obtain a transformation with clearly expressed spatial properties, while giving acceptable visual results. Thus, we have defined a class of elementary polar functions preserving the surfaces, except in the neighbourhood of the pole of deformation: it is the pseudo-equal-area property. Then we have defined an operation to combine these elementary transformations, the "progressive composition", which is commutative (i.e. independent of the order of application of the elementary transformations) and which preserves the property of pseudo-equal-area. Some thematic distorted maps are conclusively provided, in order to obtain areas proportional to the associated descriptive values. We analyse the advantages and the disadvantages of the various options for the considered functions.*

*KEY WORDS: cartogram, anamorphosis, cartographic transformation, thematic cartography, map, spatial model, visualisation.*

---

---

<sup>1</sup> On entend ici par transformation polaire pseudo-équivalente, une déformation du plan qui respecte, sauf dans un voisinage de chaque pôle, la règle d'invariance de l'aire des surfaces dessinées sur ce plan.

## 1 Introduction

La cartographie en anamorphose recouvre un ensemble de méthodes de déformation d'une carte « *qui consiste à transposer, à transcrire une variable descriptive des lieux en une variable déformant ces lieux, en ce sens c'est une métaphore spatiale* » (Langlois, Denain 97). On peut aussi mettre dans cette catégorie les transformations cartographiques basées sur la déformation de l'espace à partir d'un tableau de distance-temps entre des nœuds d'un réseau, (Tobler 77), reprise par Muller (Muller 79). De nombreux travaux ont porté sur l'anamorphose unipolaire ou multipolaire, appliquée souvent à l'accessibilité (Cauvin, Reymond 86), (Cauvin 98). Dans (Langlois, Denain 98), nous retenons deux catégories de transformations polaires. L'anamorphose vectorielle, qui consiste à déformer la carte à partir de vecteurs associés aux pôles et l'anamorphose scalaire où la déformation est réalisée à partir d'une valeur numérique (un facteur scalaire) associée à chaque pôle, qui dilate ou rétrécit l'espace en modifiant l'échelle locale autour du pôle en fonction de la valeur associée. C'est dans cette dernière catégorie que notre travail se situe ici, qui précisera les conditions à remplir pour ce type de déformation.

Pour tester les opérateurs d'anamorphose que nous présentons ici, nous avons développé une application graphique capable de déformer une carte (exportée depuis ArcView). Plusieurs logiciels permettent de réaliser ce genre de transformation. Par exemple Anaplaste<sup>2</sup> (et Struct), cité dans (Cauvin 1998), est basé sur la méthode des éléments finis appliquée à la déformation de matériaux soumis à des contraintes (barres, plaques, structures quelconques), la méthode générale est décrite par exemple dans (Rockey & al. 1975). Mais il existe peu de publications dans la littérature géographique ou cartographique française présentant une méthode clairement définie et suffisamment simple qui réponde à notre problématique. Il faut regarder dans la littérature anglo-saxonne, pour trouver exposées des techniques de représentation explicitées mathématiquement. Waldo Tobler expose précisément un certain nombre de méthodes (Tobler 2000), on peut aussi consulter (Leung et al. 1994) qui font, plus récemment, une revue des techniques de déformation géométrique. On y décrit par exemple, la méthode des projections polyfocales (Kadmon et al. 1978) qui combine des déformations issues de plusieurs pôles (ou foyers) selon des méthodes inspirées de l'optique, réalisant des projections perspectives particulières. Continuant dans cette idée de combiner plusieurs pôles, mais avec un principe totalement différent de transformation, nous avons approfondi cette idée en résolvant par exemple, comme nous le verrons plus loin, la question de la non-commutativité de la composition des transformations, qui n'est pas du tout abordée dans ces travaux.

Il existe un grand nombre de fonctions de déformation de l'espace, aussi, notre objectif est de présenter une méthode ayant des propriétés spatiales clairement explicitées, tout en donnant des résultats visuels acceptables, ce qui peut être contradictoire. Ainsi, nous cherchons une transformation multipolaire, résultant de la combinaison de fonctions polaires élémentaires, dépendant chacune d'un seul paramètre scalaire. Ce travail contient donc deux étapes à résoudre : d'une part, (§3 et §4) définir une transformation élémentaire qui permette d'agrandir ou de diminuer la surface d'une zone de la carte à partir de son centroïde, les autres zones se trouvant alors déplacées et déformées, mais sans que leur aire globale en soit affectée (grâce à la propriété de *pseudo-équivalence*). D'autre part, (§6) définir parmi plusieurs candidates possibles, une opération de combinaison de ces transformations élémentaires qui soit commutative (c'est-à-dire indépendante de l'ordre d'application des transformations élémentaires) et préserve la propriété de pseudo-équivalence de manière à ce que les surfaces finales des zones soient proportionnelles aux valeurs descriptives associées. Par exemple, pour une variable descriptive représentant un effectif de population, nous montrons (§7) comment paramétrer cette déformation pour dilater ou rétrécir les surfaces de manière à ce que la densité de cette population devienne constante dans toutes les zones.

## 2 Formulation du problème et hypothèses de départ

Le problème se résume donc à la donnée d'un semis de points  $\{P_i\}_{i=1,k}$  sur un plan, appelés pôles et une variable descriptive quantitative  $V=\{v_i\}_{i=1,k}$  associée aux pôles. Les pôles peuvent représenter éventuellement des centroïdes de zones auxquels sont associées les valeurs descriptives  $v_i$ . Pour un pôle  $P$ , on réalise une déformation isotrope, c'est-à-dire identique dans toutes les directions autour de  $P$ . La transformation d'un point  $M$  ne dépend alors que de la distance  $d$  entre  $P$  et  $M$  qui est la norme du vecteur  $PM$  :

$$d = d(P, M) = \left\| \overrightarrow{PM} \right\|$$

Elle peut être exprimée par une fonction numérique  $d' = f(d)$  qui modifie la distance initiale  $d$  en distance déformée  $d'$ . Cette fonction, appelée ici fonction polaire, permet de construire l'ensemble des points transformés

<sup>2</sup> La description mathématique de struct (ou anaplaste) est publiée dans *The cartographic journal*, 1989, vol 26, n°2.

$M'$  lorsque les points  $M$  décrivent une figure quelconque (par exemple une carte). Notons  $\overrightarrow{PM} = d\vec{u}$  où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de  $P$  vers  $M$ . La déformation est alors représentée par le champ vectoriel  $\overrightarrow{G_p}$  qui associe à tout point  $M$ , son vecteur de déformation  $\overrightarrow{MM'}$  par :

$$\overrightarrow{G_p}(M) = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{PM'} - \overrightarrow{PM} = (f(d) - d)\vec{u} = \left(\frac{f(d)}{d} - 1\right)\overrightarrow{PM} \quad [0]$$

La fonction polaire  $f$  associée au pôle  $P$  peut dépendre d'un paramètre de déformation  $r$  qui est calculé à partir de la valeur descriptive  $v$  associée au pôle.

Cette anamorphose résulte finalement de l'application combinée, pour chaque  $i$  variant de 1 à  $k$  de la déformation polaire  $f_i$  centrée sur le pôle  $P_i$  et de paramètre  $r_i$  (calculé à partir de  $v_i$ ).

Nous devons donc trouver un modèle de transformation, respectant si possible, les propriétés suivantes :

- 1) Définir une classe  $\mathbf{C}$  de fonctions polaires  $f$  isotropes qui dilatent (ou rétractent) un voisinage  $B$  de ce pôle, proportionnellement à la valeur descriptive associée  $v$  :

$$Aire(f(B)) = k.v.Aire(B)$$

tout en conservant les surfaces en dehors de ce voisinage. Ceci se traduit par la propriété suivante (appelée ici *pseudo-équivalence*) : toute figure  $F$  dessinée sur le plan, ne contenant pas le voisinage  $B$  de déformation du pôle conserve sa surface initiale :

$$(F \cap B = \emptyset) \Rightarrow (Aire(f(F)) = Aire(F))$$

- 2) Trouver une méthode de combinaison (notée  $*$ ) des fonctions polaires, à la fois commutative et compatible avec la propriété de *pseudo-équivalence*. Cela se résume en deux hypothèses :
  - a. *conservation des surfaces après combinaison* : pour toute figure  $F$  dessinée sur le plan, ne contenant aucun voisinage des pôles associés à  $f$  et  $g$  on a :  $Aire(f*g(F)) = Aire(F)$
  - b. *Commutativité de la combinaison* :  $\forall f, g \in \mathbf{C}, f*g = g*f$
- 3) Trouver une transformation finale (résultant de la combinaison des fonctions polaires) qui ne soit pas trop déformante, permettant ainsi de reconnaître la carte initiale à travers la carte déformée, en particulier qui respecte la topologie (pas de « chiffonnage »).

### 3 Modèle de dilatation

Une telle fonction polaire repose sur l'idée d'insertion d'un disque rigide dans une membrane élastique, centré sur le pôle et dont la surface est proportionnelle à la valeur descriptive donnée. Lorsqu'on insère un disque de rayon  $r$  centré sur un point  $P$  du plan, l'espace, considéré comme élastique, est repoussé autour du disque. La manière dont l'espace se déforme autour du disque suite à cette insertion doit être définie de manière à posséder des propriétés définies plus haut.

Sans modéliser le comportement physique exact d'une membrane élastique soumise à des étirements, ce qui n'est pas notre problème ici, nous allons nous servir de cette analogie physique pour construire un modèle de déformation en le pliant à nos exigences de représentation. Nous allons partir du principe simple suivant : on considère une membrane supposée infinie et déformable tout en restant plane, dans laquelle on délimite un domaine d'étude, suffisamment grand. Lorsqu'on insère un disque rigide de rayon  $r$  dans notre membrane, celle-ci est repoussée autour du disque, créant un trou en son sein de la taille du disque ainsi qu'une dilatation latérale et une contraction radiale de l'espace au voisinage du disque.

On considère que la partie de membrane occupée maintenant par le disque s'est transformée en une couronne autour de lui. On impose de plus que la surface de cette couronne reste égale à la surface du disque, ce qui confère au modèle, comme nous allons le montrer, une propriété cartographique intéressante. Ainsi, de proche en proche la membrane se déforme par couronnes successives de même surface. Avec cette hypothèse, nous montrerons que **toute figure dessinée sur la membrane conserve son aire après l'insertion d'un disque**. En particulier l'aire totale du domaine d'étude est invariante mais, si l'on considère la surface du disque comme faisant maintenant partie du domaine d'étude, celui-ci est alors exactement augmenté de la surface du disque, après insertion.

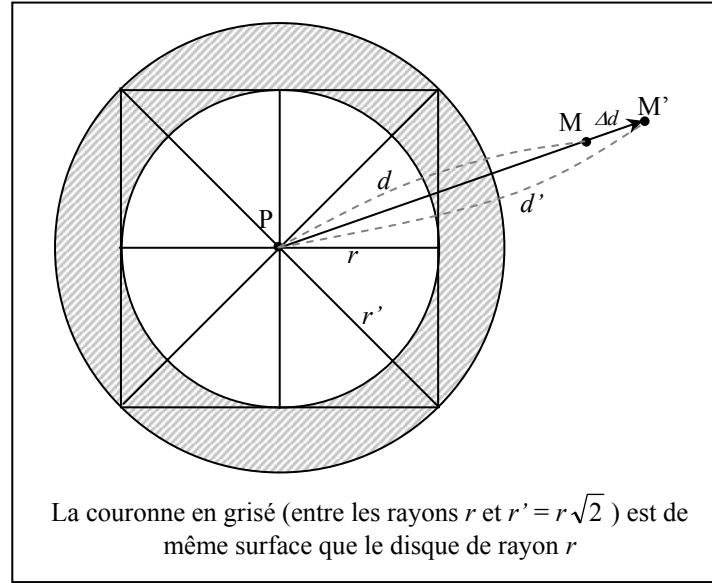


figure 1 - Modèle de dilatation par conservation de surface

Cette hypothèse donne à l'espace (en dehors du disque qu'on vient d'insérer) une des propriétés classiques des projections cartographiques appelée *équivalence*, qui stipule que les objets (en particulier, un petit cercle appelé indicatrice de Tissot) conservent leur aire après projection, même s'ils sont déformés.

#### 4 Modèle discontinu

Après insertion d'un disque, la membrane sera discontinue car percée d'un trou de surface égale au disque. Pour que le modèle possède la propriété de *pseudo-équivalence* (c'est-à-dire équivalence, sauf dans le voisinage de P, correspondant au disque d'insertion), si l'on appelle r et r' les rayons interne et externe des cercles limitant la couronne qui l'entoure, on cherche r' tel que la surface de la couronne (de rayons r et r') soit égale à la surface du disque initial (de rayon r). On peut donc déduire de l'égalité entre ces deux surfaces, la valeur du rayon extérieur r' :

$$\pi r'^2 = \pi(r'^2 - r^2) \Rightarrow r' = r\sqrt{2}$$

d'une manière plus générale, nous allons montrer que toute couronne de centre P et de rayons r<sub>1</sub> et r<sub>2</sub>, notée C(P, r<sub>1</sub>, r<sub>2</sub>), doit se transformer en une autre couronne C(P, r'<sub>1</sub>, r'<sub>2</sub>) de même surface, après insertion d'un disque de rayon r centré en P.

Pour tout point M du plan, posons  $d = \|\overline{PM}\|$ ,  $d' = \|\overline{PM'}\|$  et  $\Delta d = \|\overline{MM'}\|$ . La fonction polaire f<sub>r,r</sub> associée à l'insertion du disque de centre P et de rayon r est caractérisée, pour tout point M du plan, par le point transformé M' vérifiant:

$$(f_r(d) = d') \Leftrightarrow (d'^2 = d^2 + r^2)$$

ce qui donne l'expression de la fonction polaire f<sub>r</sub> de la variable x qui représente la distance d au pôle : x ≥ 0 :

$$f_r(x) = \sqrt{x^2 + r^2} \tag{1}$$

On peut définir la transformation réciproque correspondant à la rétraction du cercle par le centre C et selon le rayon r par la transformation:

$$(f_r^{-1}(d') = d) \Leftrightarrow (d^2 = d'^2 - r^2)$$

$$f_r^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - r^2} \tag{2}$$

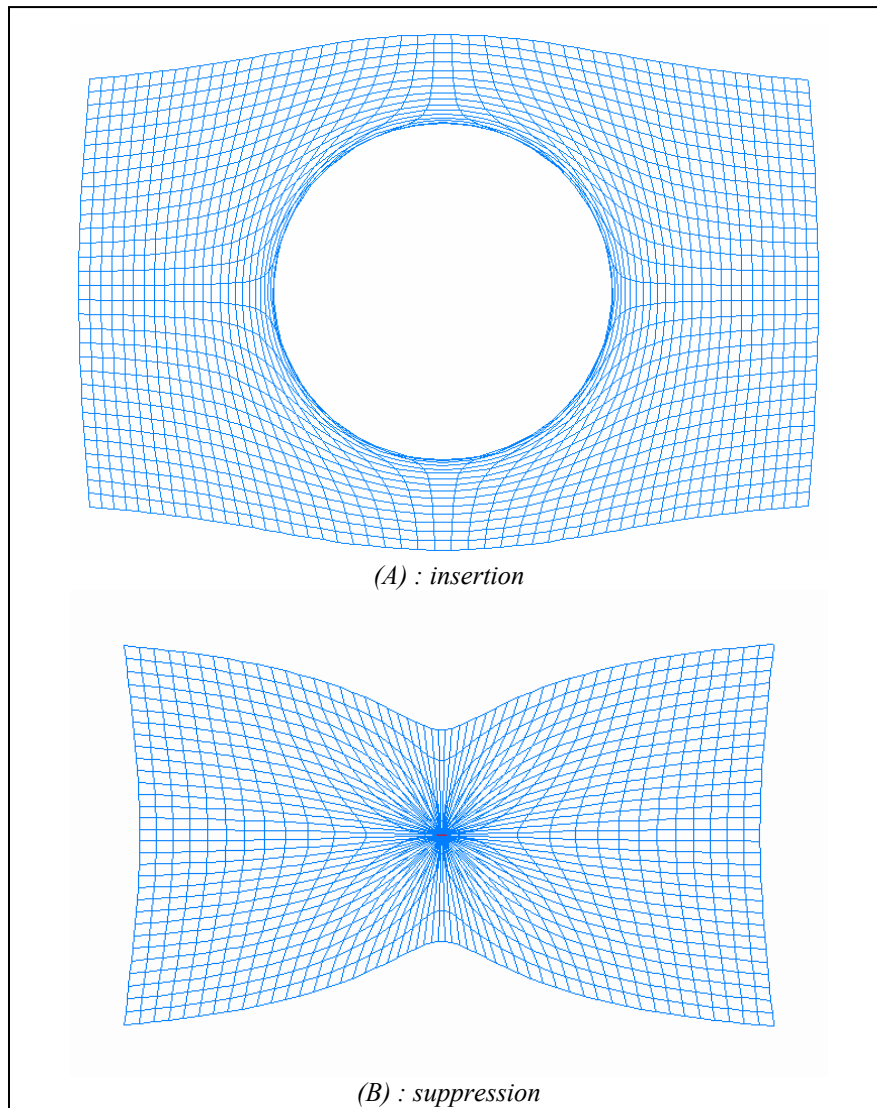
En utilisant les nombres complexes, (où i = √-1 c'est-à-dire i<sup>2</sup> = -1) on peut exprimer la transformation réciproque par l'insertion d'un disque de rayon imaginaire ir, car la relation [2] peut s'écrire aussi selon la formule [1] en prenant un rayon imaginaire

$$d^2 = d'^2 + (ir)^2 = d'^2 + i^2 r^2 = d'^2 - r^2$$

Ainsi, on pourra noter :

$$f_r^{-1} = f_{ir}$$

l'insertion d'un cercle de rayon ir, représente une surface négative : s = π(ir)<sup>2</sup> = -πr<sup>2</sup>



**figure 2 - modèle discontinu : chaque carreau déformé garde sa surface initiale**

Avec cette transformation, chaque point d'une couronne  $C(P, r_1, r_2)$ , sera transformée par la fonction  $f_r$  en un point de la couronne transformée  $C'(P, r'_1, r'_2)$ , et en particulier les 2 cercles bordant la couronne, auront les rayons transformés suivants :

$$r_1'^2 = r_1^2 + r^2$$

$$r_2'^2 = r_2^2 + r^2$$

sa surface transformée  $S'$  sera alors égale à sa surface initiale  $S$ , en effet:

$$S' = \pi(r_2'^2 - r_1'^2) = \pi(r_2^2 - r_1^2 + r^2 - r^2) = \pi(r_2^2 - r_1^2) = S$$

Plus généralement, si l'on considère un élément de surface  $dS$  situé à une distance  $d$  du pôle  $P$ , il peut se représenter comme une portion de couronne d'angle  $d\alpha$  dont les rayons des cercles interne et externe sont  $x$  et  $x+dx$  sa surface est alors calculée par :

$$dS = \pi((x + dx)^2 - x^2)d\alpha = \pi(2xdx + dx^2)d\alpha \cong 2\pi \cdot x \cdot dx \cdot d\alpha$$

après transformation, sa distance passe de  $x$  à  $\sqrt{x^2 + r^2}$  et sa nouvelle surface vaut :

$$dS' = \pi \left( \left( \sqrt{x^2 + r^2} + d(\sqrt{x^2 + r^2}) \right)^2 - (x^2 + r^2) \right) d\alpha$$

$$dS' = \pi \left( (x^2 + r^2) + \frac{2\sqrt{x^2 + r^2} \cdot x \cdot dx}{\sqrt{x^2 + r^2}} + \frac{x^2 dx^2}{x^2 + r^2} - (x^2 + r^2) \right) d\alpha$$

après simplification et élimination des termes négligeables (en  $dx^2$ ) on trouve :

$$dS' = dS$$

d'où :

**Conclusion :** la transformation du plan relative à un pôle, selon la fonction polaire  $f_r(x) = \sqrt{x^2 + r^2}$  conserve les surfaces (propriété d'équivalence)

Le champ vectoriel  $\overrightarrow{G_{P,r}}$ , du pôle  $P$  et relatif à cette fonction polaire  $f_r$  du paramètre  $r$  (pouvant être réel positif ou imaginaire pur sous la forme  $r = i.s$  avec  $s > 0$ ), qui associe à tout point  $M$  du plan, le vecteur de déformation  $\overrightarrow{MM'}$  s'écrit alors d'après [0]:

$$\overrightarrow{G_{P,r}}(M) = \left( \frac{f_r(d)}{d} - 1 \right) \overrightarrow{PM} = \left( \sqrt{1 + \left( \frac{r}{d} \right)^2} - 1 \right) \overrightarrow{PM}$$

Le champ vectoriel tend à s'annuler lorsque le point  $M$  est suffisamment loin de  $P$ . Lorsque  $r$  est imaginaire (contraction) et que le point  $M$  est dans le disque ( $d < |r|$ ), la racine carrée est alors complexe et le point  $M'$  est comme « aspiré » par le pôle sur l'axe imaginaire orthogonal au plan en  $P$ , puisque on a alors, (en posant  $\vec{v} = i \cdot \vec{u}$ ) :  $\overrightarrow{PM'} = \sqrt{r^2 - d^2} \vec{v}$ . Dans la pratique, en ne gardant que la partie réelle, on pourra considérer que  $M'$  est en  $P$ .

### 5 Modèles continus

La discontinuité spatiale créée par un trou dû à l'insertion d'un disque dans l'espace élastique, peut être jugée gênante, car elle perturbe la topologie de la surface. On peut modifier un peu la fonction polaire au voisinage du disque d'insertion, sans remettre en cause le principe de conservation des surfaces extérieures au disque inséré. Le principe physique consiste alors, au lieu de créer un trou, à étirer la membrane radialement autour du centre de manière à augmenter la surface, mais sans la trouser. La topologie est alors respectée.

Nous allons donc modifier un peu la fonction polaire  $f_r$  qui calcule la distance dilatée à partir du centre d'insertion. Dans le modèle discontinu, elle est donnée par  $y = f_r(x) = \sqrt{x^2 + r^2}$ . On voit que pour  $x = 0$ , la fonction donne  $y = r$ , ce qui fait que l'espace déformé contient un trou de rayon  $r$  autour du centre d'insertion. Sans remettre totalement en cause la propriété de conservation des surfaces, nous modifions alors  $f_r$  pour les valeurs de  $x$  inférieures à  $r$ , en définissant une nouvelle fonction, notée  $h$ , de manière à supprimer le trou au centre, qui donne l'effet d'un « dôme » autour du pôle. De plus la fonction  $h$  doit se raccorder à  $f_r$  au point  $A = (r, \sqrt{2}r)$  et avoir si possible la même pente en  $A$ , ce qui se traduit par les trois conditions,  $h(0) = 0$ ,  $h(r) = f_r(r) = \sqrt{2}r$  et  $h'(r) = f_r'(r)$ .

On peut chercher les candidats parmi les fonctions puissances  $h(x) = ax^m$ . En effet, la première condition est toujours respectée, la deuxième se traduit par :  $h(r) = \sqrt{2}r = ar^m$  d'où :  $a = \sqrt{2}r^{1-m}$ , soit :

$$h(x) = \sqrt{2}r \left( \frac{x}{r} \right)^m \tag{3}$$

Si l'on veut la continuité de la pente, il faut aussi que la troisième condition soit respectée. Il faut, pour cela, calculer les dérivées :

$$h'(x) = m\sqrt{2} \left( \frac{x}{r} \right)^{m-1}, \text{ et } f_r'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

la condition s'écrit :

$$h'(r) = f'_r(r) = m\sqrt{2} = \frac{r}{\sqrt{2r^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ce qui impose que  $m = \frac{1}{2}$  dans la formule [3]. Il ne reste alors qu'un candidat pour la fonction  $h$  de classe  $C_1$  (des fonction continues, ainsi que leur dérivée), donné par :

$$\forall x \in [0, r], h(x) = \sqrt{2rx} \tag{4}$$

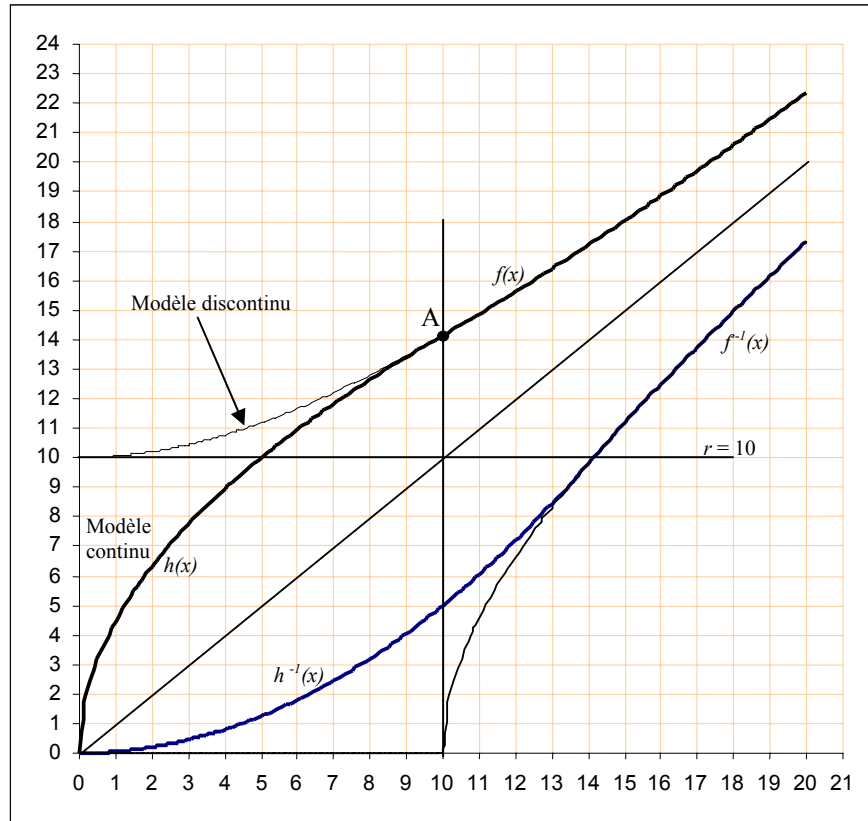


figure 3 - Courbes des fonctions polaire  $f$  et  $h$  et de leur fonctions réciproques

Pour la fonction inverse, utilisée pour la suppression de cercles, on a alors (pour  $x < r\sqrt{2}$ ) :

$$h^{-1}(x) = \frac{x^2}{2r} \tag{4'}$$

Parmi tous les modèles possibles donnés par [3], on peut noter aussi le modèle le plus simple pour  $h$ , (mais qui est seulement de classe  $C_0$ ), c'est la fonction linéaire, qui correspond à  $m = 1$ , soit

$$h(x) = \sqrt{2}x \tag{5}$$

dont l'inverse est

$$h^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x \tag{5'}$$

Finalement, le cas le plus intéressant étant celui dont la dérivée est continue (pour  $m = 1/2$ ), on peut redéfinir la fonction polaire  $f$  comme une fonction à deux morceaux, selon qu'on se trouve à l'intérieur du cercle de rayon  $r$  ou à l'extérieur :

$$f(x) = \begin{cases} (x \geq r) \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + r^2} \\ (x < r) \Rightarrow f(x) = \sqrt{2rx} \end{cases}$$

soit, avec  $d = \|\overline{PM}\|$

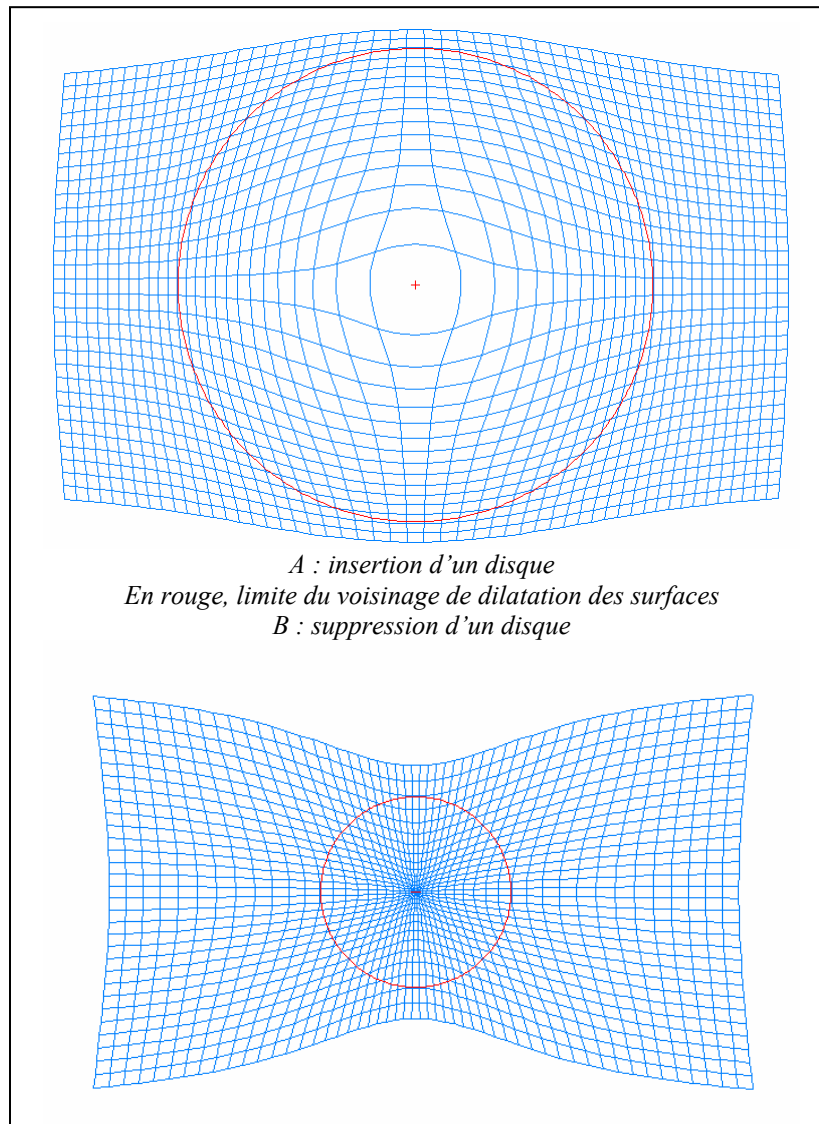
$$\overrightarrow{G_{p,r}(M)} = \overrightarrow{MM'} = \begin{cases} (d \geq r) \Rightarrow \overrightarrow{G_{p,r}(M)} = \left( \sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}} - 1 \right) \overrightarrow{PM} \\ (d < r) \Rightarrow \overrightarrow{G_{p,r}(M)} = \left( \sqrt{\frac{2r}{d}} - 1 \right) \overrightarrow{PM} \end{cases} \quad [6]$$

et pour son inverse (suppression d'un disque de rayon  $r$ ) :

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} (x \geq r\sqrt{2}) \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - r^2} \\ (x < r\sqrt{2}) \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2r} \end{cases}$$

soit

$$\overrightarrow{G_{p,r}^{-1}(M)} = \overrightarrow{MM'} = \begin{cases} (d \geq r\sqrt{2}) \Rightarrow \overrightarrow{G_{p,r}^{-1}(M)} = \left( \sqrt{1 - \frac{r^2}{d^2}} - 1 \right) \overrightarrow{PM} \\ (d < r\sqrt{2}) \Rightarrow \overrightarrow{G_{p,r}^{-1}(M)} = \left( \frac{d}{2r} - 1 \right) \overrightarrow{PM} \end{cases} \quad [6']$$



**figure 4 - Transformations continues. (dôme)**



## 6 Combinaison des fonctions polaires

Ayant maintenant défini les fonctions polaires qui sont à la base des transformations élémentaires appliquées à chaque pôle, nous devons passer à la deuxième étape, celle de leur combinaison, pour construire l'anamorphose cherchée.

Soient deux fonctions polaires  $f_1$  et  $f_2$  appliquées respectivement aux pôles  $P_1$  et  $P_2$  et de rayons  $r_1$  et  $r_2$ . Chacune effectuée isolément conserve les surfaces, mais il faut combiner leur effet dans le même espace. On peut se demander comment définir une combinaison et son comportement. En particulier, on doit vérifier si la propriété de conservation des surfaces est toujours respectée. Quelle opération doit-on utiliser entre  $f_1$  et  $f_2$  pour respecter cette propriété ?

Il serait également souhaitable que cette opération, notée pour l'instant  $*$  soit commutative, c'est-à-dire :

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$$

... de manière à ce que le résultat de plusieurs déformations ne dépende pas de l'ordre dans lequel les opérations ont été effectuées.

### 6.1 Combinaison par sommation

Le **premier** candidat, car le plus simple et le plus utilisé, pour combiner deux ou plusieurs vecteurs est la **somme** vectorielle. Cette opération est commutative. Malheureusement, nous allons montrer que la somme vectorielle n'est pas compatible avec la pseudo-équivalence.

Soient  $M_1$  l'image de  $M$  par la transformation  $G_1$  de pôle  $P_1$  et  $M_2$  celle de  $M$  par la transformation  $G_2$  de pôle  $P_2$ . Alors, à tout point  $M$  de l'espace est associé le vecteur de déformation :

$$(G_1 + G_2)(M) = \overrightarrow{G_1(M)} + \overrightarrow{G_2(M)} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM'}$$

Il suffit pour cela d'exhiber un contre-exemple : Prenons le cas simple où les deux pôles sont confondus et les disques de même rayon  $r$ . On a alors,  $P_1 = P_2 = P$ ,  $d_1 = d_2 = d$  et les vecteurs unitaires dans les directions  $P_1M$  et  $P_2M$ , égaux à  $\vec{u}$

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} = (\sqrt{d^2 + r^2} - d)\vec{u} + (\sqrt{d^2 + r^2} - d)\vec{u} = 2(\sqrt{d^2 + r^2} - d)\vec{u}$$

$$\text{d'où} \quad \|\overrightarrow{MM'}\| = 2(\sqrt{d^2 + r^2} - d) \quad [7]$$

si on avait inséré un seul cercle de surface égale à la somme des deux précédents, son rayon serait

$$r' = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2} \quad \text{et on aurait :} \quad \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{d^2 + 2r^2} - d$$

ce qui est différent de [7] et montre que la somme vectorielle ne conserve pas les surfaces puisque la couronne générée ne correspond pas à celle attendue.

**Conclusion : La somme vectorielle est commutative mais n'est pas pseudo-équivalente.**

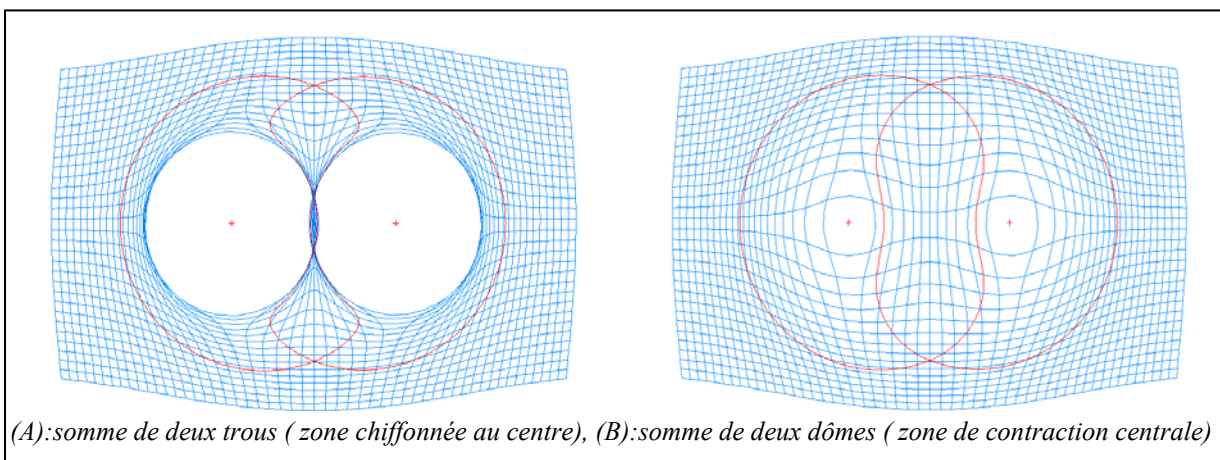


figure 5 - sommation vectorielle

6.1.1 Composition de deux fonctions polaires de même centre

Considérons  $f_{S_1}$  la fonction polaire associée à l'insertion du disque de surface  $S_1$  et  $f_{S_2}$  celle associée à  $S_2$  au même pôle  $C$ . La composition de ces deux fonctions polaires correspond à la fonction d'insertion du disque de surface  $S_1+S_2$ , en effet :

$$f_{S_1} \circ f_{S_2} = f_{S_2}(f_{S_1}(x)) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + \frac{S_2}{\pi}}\right)^2 + \frac{S_1}{\pi}} = \sqrt{x^2 + \frac{S_1 + S_2}{\pi}} = f_{S_1+S_2}(x)$$

Soit :

$$\boxed{f_{S_1} \circ f_{S_2} = f_{S_1+S_2}} \quad [8]$$

Cette composition est ici commutative, mais c'est un cas particulier, car les deux fonctions sont relatives au même centre.

**Conclusion :** *La composition de deux insertions de même centre est commutative et équivalente.*

6.1.2 Composition de deux fonctions polaires de centres distincts

Lorsqu'on insère deux cercles de surfaces  $S_1$  et  $S_2$  centrés en  $P_1$  et  $P_2$  différents, l'opération n'est plus commutative comme nous allons le préciser ci-dessous, mais elle est compatible avec la propriété de pseudo-équivalence. En effet, à l'issue d'une première transformation polaire, une figure  $F$  quelconque dessinée sur la membrane se déforme en  $F'$ , sans changer de surface. Pour les mêmes raisons, lors de l'application de la deuxième transformation,  $F'$  sera transformée en  $F''$  et sera encore de même surface.

6.1.3 La composition des fonctions n'est pas commutative.

L'opération de composition des fonctions (et en particulier des fonctions polaires) n'étant pas commutative en général, ceci se concrétise par le fait que la déformation de l'espace (la membrane élastique) due à l'insertion d'un disque  $D(P_1, r_1)$  de centre  $P_1$  et de rayon  $r_1$ , suivie d'une deuxième déformation due à l'insertion d'un autre disque  $D(P_2, r_2)$ , ne donne pas la même figure que si l'on avait commencé par insérer  $D(P_2, r_2)$ , puis  $D(P_1, r_1)$ . En effet, dans le premier cas, l'insertion du deuxième disque déforme l'image du premier, alors que le second reste circulaire. Lorsqu'on procède dans l'autre sens, c'est  $D(P_1, r_1)$  qui déforme  $D(P_2, r_2)$ . Le problème s'accroît lorsqu'il y a  $k$  disques à insérer.

Ainsi, le résultat final de la déformation dépend de l'ordre dans lequel on effectue les insertions.

La résolution de cette anomalie pose quelques difficultés, que nous allons aborder maintenant.

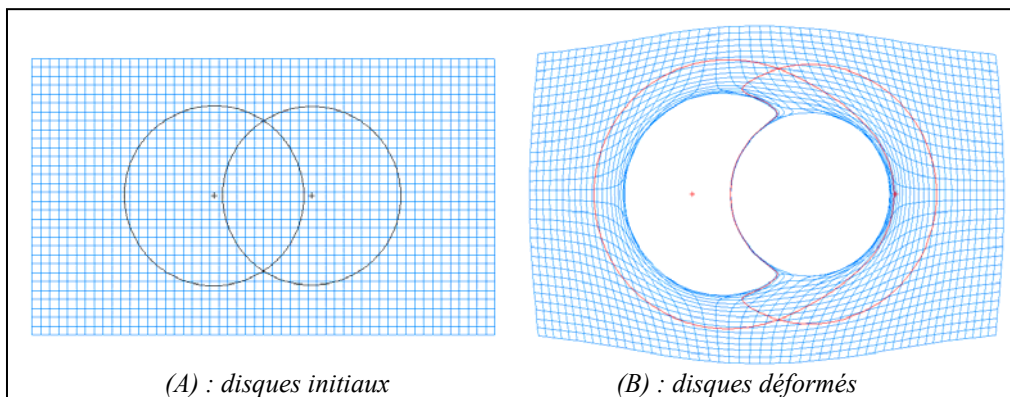


figure 6 - La composition des deux disques n'est pas commutative (dissymétrie)

## 6.2 Combinaison par composition progressive

### 6.2.1 Définition d'une composition commutative

L'idée repose sur la déformation de l'espace suite à l'insertion simultanée mais progressive de tous les disques. Plus précisément, on va insérer en  $n$  étapes un  $n$ -ième de la surface de chaque disque. Nous appelons cette opération, **composition progressive**. Plus  $n$  devient grand, plus l'effet de la non commutativité s'atténue, pour s'approcher du modèle de croissance simultanée de tous les disques dans l'espace de déformation.

La composition progressive utilise la propriété d'additivité  $f_{S_1} \circ f_{S_2} = f_{S_1+S_2}$  pour les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  de deux disques insérés au même centre.

Si l'on veut insérer  $k$  disques de surfaces  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , aux points  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , on va définir  $k$  fonctions polaires  $f_1, f_2, \dots, f_k$  chargées des déformations autour de leur pôle respectif. Pour que l'opération soit (presque) commutative, on va devoir décomposer chaque fonction  $f_i$  en  $n$  fonctions élémentaires identiques  $g_i$ , de telle sorte

$$\text{que } \underbrace{g_i \circ g_i \circ \dots \circ g_i}_{n \text{ fois}} = f_i.$$

Ainsi, à chacune des  $n$  étapes de la construction on compose les  $k$  fonctions élémentaires insérant ainsi un  $n$ -ième de la surface de chaque disque, la fonction composée globale  $f$  donnant le résultat final.  $f = \underbrace{(g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_k) \circ (g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_k) \circ \dots \circ (g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_k)}_{n \text{ fois}}$

En notant le produit de composition par  $\prod_{i=1}^k g_i = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_k$

et la puissance de composition par  $f^{[n]} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}},$

la formule s'écrit avec plus de concision sous la forme:

$$f = \left( \prod_{i=1}^k g_i \right)^{[n]} \quad [14]$$

### 6.2.2 Racine de décomposition d'une fonction

Pour définir correctement la composition progressive, on doit décomposer une fonction polaire  $f$  en  $n$  fonctions identiques  $g$  telles que  $g^{[n]} = f$  on dira que  $g$  est la racine  $n$ -ième de décomposition de  $f$  ou que  $f$  est la puissance  $n$ -ième de composition de  $g$ . On utilisera aussi les notations  $\sqrt[n]{f} = g$  ou encore  $f^{\left[\frac{1}{n}\right]} = g$

#### 6.2.2.1 Cas de la fonction polaire $f$

Avec la fonction polaire  $f_S(x) = \sqrt{\frac{S}{\pi} + x^2}$ , où  $x \geq 0$  représente la distance au pôle.

On écrit cette fonction plus simplement, avec  $r^2 = \frac{S}{\pi}$ , sous la forme  $f(x) = \sqrt{x^2 + r^2}$

$$f_{\frac{S}{2}}^{[2]}(x) = f_{\frac{S}{2}}(f_{\frac{S}{2}}(x)) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + \frac{S}{2\pi}}\right)^2 + \frac{S}{2\pi}} = \sqrt{x^2 + \frac{S}{\pi}} = f_S(x)$$

ainsi,  $f_{\frac{S}{2}} \circ f_{\frac{S}{2}} = f_S$ . De la même manière on peut généraliser à  $n$  et écrire :  $f_{\frac{S}{n}}^{[n]} = f_S$ , ou :

$$f_S^{\left[\frac{1}{n}\right]} = \sqrt[n]{f_S} = f_{\frac{S}{n}}$$

... ce qui signifie qu'il revient au même d'insérer un disque de surface  $S$  d'un seul coup, ou d'insérer en  $n$  étapes successives, au même point, des disques de surface  $S/n$ . Cette propriété semble évidente ici, mais elle l'est moins pour d'autres fonctions. Par exemple, nous aurons besoin de l'utiliser la racine de décomposition d'une fonction puissance.

### 6.2.2.2 Cas d'une fonction puissance

Dans le cas où  $f$  est une fonction puissance d'exposant réel  $m$ , c'est-à-dire :  $f(x) = ax^m$ , on peut chercher  $g$ , la racine  $n$ -ième de décomposition de  $f$ , soit  $f^{[\frac{1}{n}]} = \sqrt[n]{f} = g$ , dans le même ensemble des fonctions puissance. En posant  $g(x) = bx^k$ , on peut calculer par récurrence l'exposant et le coefficient de  $g$ , ce qui donne :

$$k = m^{1/n} \text{ et } b = a^{\frac{1-k}{1-m}}$$

ainsi, le résultat est moins évident : pour  $m \neq 1$  on a

$$g(x) = \sqrt[n]{f}(x) = a^{\frac{1-k}{1-m}} x^{m^{1/n}} \quad [9]$$

et pour  $m = 1$  :

$$g(x) = \sqrt[n]{f}(x) = a^{\frac{1}{n}} x \quad [9']$$

### 6.2.3 Racine de décomposition des fonctions $h$

Nous avons vu précédemment la formule de la racine de décomposition  $n$ -ième d'une fonction puissance. Nous pouvons l'appliquer pour les fonctions  $h$ , données en [3]. On trouve alors l'expression de la racine de décomposition  $n$ -ième de  $h$ , pour  $m \neq 1$  :

$$h(x) = \sqrt{2}r \left(\frac{x}{r}\right)^m \Rightarrow h^{[\frac{1}{n}]}(x) = r\sqrt{2}^{\frac{1-m^{1/n}}{1-m}} \left(\frac{x}{r}\right)^{m^{1/n}} \quad [10]$$

dont l'écriture se simplifie un peu en posant  $k = m^{1/n} = \sqrt[n]{m}$  et  $p = \frac{1-k}{1-m}$  :

$$h^{[\frac{1}{n}]}(x) = r\sqrt{2}^p \left(\frac{x}{r}\right)^k \quad [10']$$

et pour  $m=1$  : on a  $h(x) = \sqrt{2}x$  ce qui donne

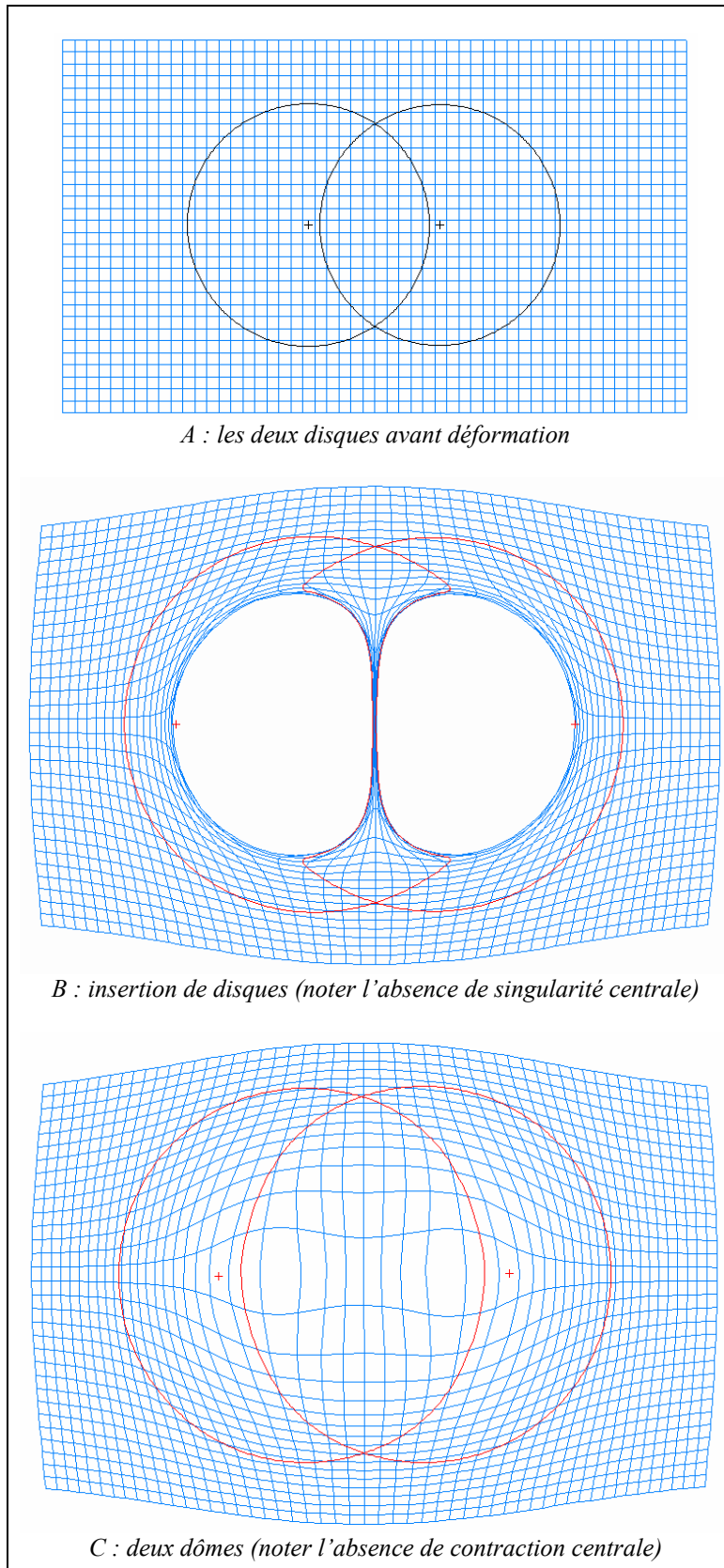
$$h^{[\frac{1}{n}]}(x) = 2^{\frac{1}{2n}} x \quad [10'']$$

On montre facilement que la racine de décomposition  $n$ -ième de la fonction inverse  $h^{-1}$  est égale à l'inverse de sa racine de décomposition, qui s'écrit :  $(h^{-1})^{[\frac{1}{n}]} = h^{[\frac{1}{n}]}$ . On a alors en posant  $k' = \frac{1}{\sqrt[n]{m}}$  et  $p' = \frac{1-k'}{1-m}$  pour  $m \neq 1$  :

$$h^{[\frac{1}{n}]}(x) = r\sqrt{2}^{p'} \left(\frac{x}{r}\right)^{k'} \quad [11]$$

et pour  $m = 1$  :

$$h^{[\frac{1}{n}]}(x) = 2^{-\frac{1}{2n}} x \quad [11']$$



**figure 7 - Composition progressive de deux disques, noter la symétrie, contrairement à la figure 6**

pour la fonction  $h$  de classe  $C_1$  (en [5]), la formule [10], se réécrit en prenant  $m = \frac{1}{2}$ , pour donner la racine de décomposition n-ième de  $h(x) = \sqrt{2rx}$  :

$$h^{\left[\frac{1}{n}\right]}(x) = 2r \left( \frac{x}{2r} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad [12]$$

et la racine de décomposition de sa fonction inverse  $h^{-1}$  s'écrit :

$$\left(h^{-1}\right)^{\left[\frac{1}{n}\right]}(x) = h^{\left[\frac{-1}{n}\right]}(x) = 2r \left( \frac{x}{2r} \right)^{\sqrt{2}} \quad [13]$$

Pour réaliser notre anamorphose complète sur  $k$  pôles affectés de leur fonction polaire  $f_1, f_2, \dots, f_k$ , il suffit donc d'appliquer la composition progressive sur ces  $k$  fonctions en  $n$  facteurs : chaque facteur  $g_i$  est alors la racine  $n$ -ième de décomposition de  $f_i$ , c'est-à-dire :  $g_i = f_i^{[1/n]}$ .

Si on utilise une insertion de disque (modèle discontinu), la fonction polaire  $f_i$  à décomposer est celle définie en

[1] et se décompose en:  $g_i(x) = f_i^{[1/n]}(x) = \sqrt{\frac{r_i^2}{n} + x^2}$  Si l'on souhaite une déformation continue on utilise

pour  $x < r_i$ , la décomposition du dôme  $h$  par :  $g_i = h_i^{[1/n]}$  défini par la formule [12]. Si c'est une suppression de disque, on utilise pour  $h$  la formule [13].

Le résultat final est alors calculé par la formule [14] énoncée au début de ce paragraphe :

$$f = \left( \prod_{i=1}^k f_i^{\left[\frac{1}{n}\right]} \right)^{[n]}$$

En théorie il faudrait faire tendre  $n$  vers l'infini pour converger vers une opération commutative, mais dans la pratique, une valeur petite de  $n$  suffit. Pour  $n = 5$ , on ne voit déjà plus les défauts de symétrie dus à l'ordre des opérations. On peut aller beaucoup plus loin, (dans la figure 7, on a pris  $n = 25$ ) mais alors le temps de calcul augmente linéairement avec  $n$ , pour une différence visuelle insensible.

**Conclusion : La « composition progressive » est (quasi) commutative et pseudo-équivalente.**

## 7 Carte zonale en anamorphose scalaire

Lorsqu'on réalise une carte thématique zonale pour représenter une variable quantitative  $V$ , au lieu de dessiner des points proportionnels aux valeurs  $v_i$ , on peut dilater la zone  $i$  relativement à la valeur  $v_i$  réalisant ainsi une anamorphose scalaire. Dans la zone  $i$  de surface  $A_i$  on insère alors un disque de surface  $S_i$ . S'il y a pseudo-équivalence des surfaces après insertion, la zone mesurera  $A'_i = A_i + S_i$ , à condition que la zone  $i$  contienne le voisinage de dilation associé au pôle  $i$ . On choisira  $S_i$  de manière à ce qu'il y ait proportionnalité entre les surfaces résultantes et les valeurs  $v_i$  de la variable descriptive :

$$\forall i \in [1, \dots, n], \frac{v_i}{A_i + S_i} = k$$

soit encore :

$$S_i = \frac{1}{k} v_i - A_i$$

Le facteur de proportionnalité  $k$ , peut être choisi de différentes manières. On peut par exemple décider que la zone  $j$  qui possède la densité minimale  $v_j/A_j$  ne soit pas déformée ( $S_j = 0$ ), la valeur de  $k$  est alors définie par cette densité minimale. Les autres zones  $i$  devront être dilatées d'une surface  $S_i$  pour ramener leur densité à  $k$ . L'inconvénient de cette méthode est qu'on modifie l'échelle globale de la carte<sup>3</sup> dans une proportion qui peut être considérable si la variable descriptive possède une forte dispersion. Il est préférable alors d'introduire des contractions, qui correspondent à la suppression d'une portion d'espace correspondant à la surface d'un disque qui disparaît par le centre. De cette manière on peut prendre par exemple comme référence pour  $k$  la densité moyenne, les surfaces à insérer  $S_i$  sont alors positives si la densité de la zone  $i$  est supérieure à la moyenne et négatives pour les autres.

<sup>3</sup> L'échelle globale de la carte peut être calculée ici comme le rapport  $e = \sqrt{\frac{D'}{D}}$  où  $D$  est l'aire du domaine réel de la carte, réunion de toutes ses zones, et  $D'$  l'aire transformée.

Une méthode plus intéressante encore consiste à choisir  $k$  de manière à ce que la surface totale de la carte (donc son échelle globale) soit conservée, c'est-à-dire que le total des dilatations positives compense exactement les dilatations négatives (rétractions),  $k$  est alors défini par :

$$\frac{v_i}{A_i + S_i} = k = \frac{\sum_i v_i}{\sum_i A_i}$$

Ainsi, soit on insère un disque et l'espace est repoussé autour, soit on retire un disque, comme si on tirait la membrane élastique par une boutonnière (réduite à un point) pour en soustraire la surface d'un disque, c'est l'opération exactement inverse de l'insertion de disque.

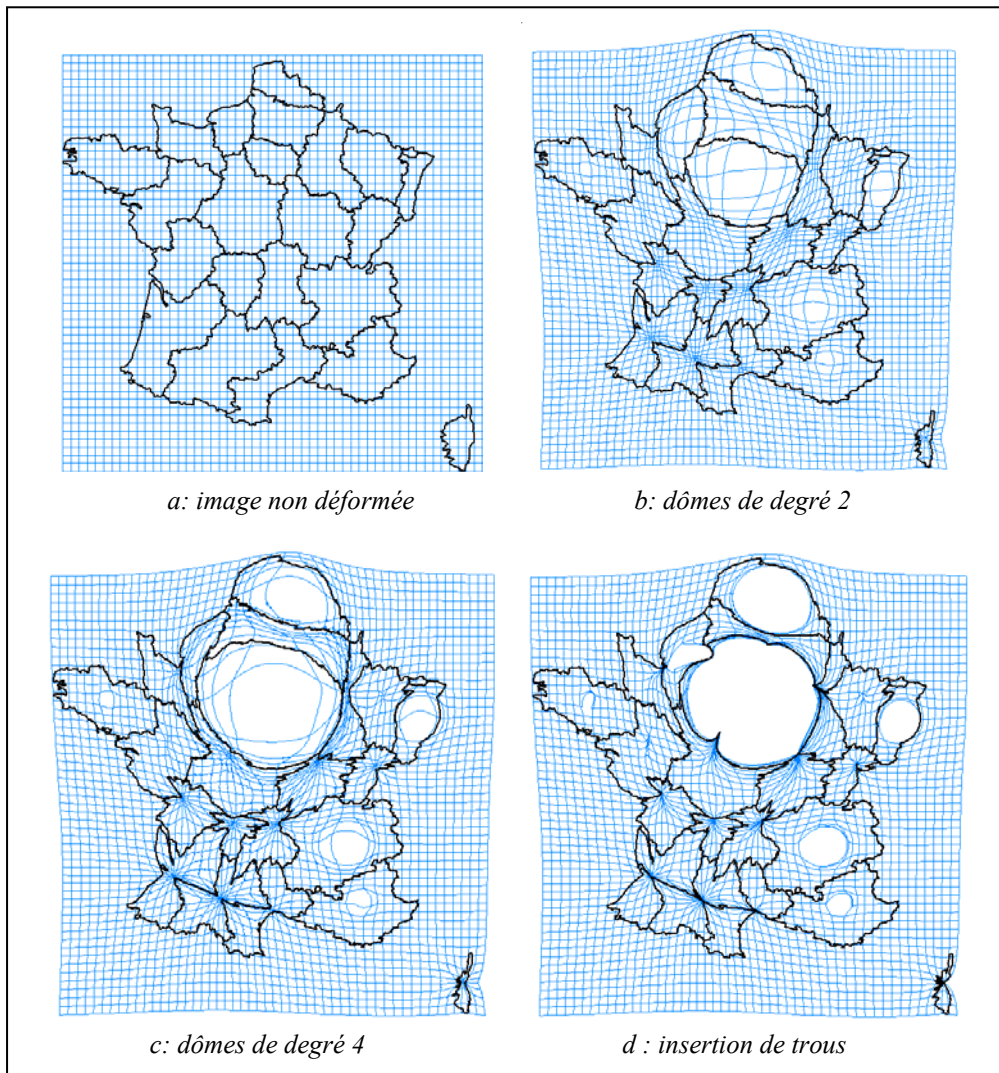


figure 8 - Population par région française en 1999

## 8 Conclusion

On voit que chaque méthode exposée ici possède ses avantages et ses inconvénients. La méthode continue de degré 2 utilisée figure 8.b est la plus douce au niveau de la déformation, mais ne respecte pas très bien la conservation des surfaces. En effet, celle-ci n'est respectée qu'en dehors de voisinages assez larges autour des pôles, si bien que les surfaces des zones, dont les contours se trouvent souvent à l'intérieur de ces voisinages, ne sont pas tout à fait proportionnelles aux valeurs descriptives. On s'en rapproche mieux avec la méthode continue de degré 4 de la figure 8.c où les pentes des dômes sont plus brutales, mais les voisinages de déformation sont les mêmes. Enfin, en 8.d, la méthode discontinue, par insertion de disques, respecte exactement la proportionnalité des surfaces aux valeurs descriptives, puisque par construction, les disques de déformation sont insérés à l'intérieur de leur zone de manière à modifier leur surface en conséquence. Mais la discontinuité de la

fonction peut produire une déformation assez brutale si les limites de la zone sont trop proches du bord d'insertion du disque. C'est le cas de l'Ile-de-France où la région est petite et le disque à y insérer est grand du fait de sa forte population.

De manière plus précise, pour une dilatation correspondant à l'insertion d'un disque de rayon  $r$ , le voisinage dans lequel les aires sont modifiées est, dans le modèle continu, un disque de rayon  $r\sqrt{2}$  autour du pôle, alors qu'il vaut seulement  $r$  dans le modèle discontinu. En dehors de ce voisinage (et dans les deux modèles), les figures sont déformées mais conservent exactement leur aire de départ (propriété d'équivalence). Lorsqu'il y a plusieurs pôles (combinés selon la composition progressive), la forme de ces voisinages est modifiée par l'influence des autres, mais ils conservent leur aire tant qu'ils ne s'intersectent pas entre eux. De même, avec plusieurs pôles, l'invariance de l'aire est exactement respectée en tout point extérieur à la réunion de ces voisinages.

On pourrait facilement améliorer le rendu général de la figure 8.d en répartissant mieux la déformation au sein de chaque zone, par exemple en descendant à la variable population au niveau du département, il y aurait alors plusieurs pôles de déformation de moindre intensité répartis dans chaque région, donnant une déformation plus homogène. Mais le but recherché ici était de montrer le mécanisme de construction de cette transformation et d'en discuter le résultat, sans chercher à y ajouter d'autres effets. Le cartographe praticien pourra juger ensuite de la pertinence de ces modèles par les résultats qu'ils produisent, en utilisant ou non des stratégies combinées ou plus fines.

Au niveau de la mise en œuvre informatique, la « composition progressive » définie en 6.2 se traduit par un algorithme itératif qui converge rapidement (en 5 itérations l'opérateur de « composition progressive » devient quasi commutatif). Il est de complexité linéaire du nombre de pôles multiplié par le nombre de points à transformer. Il permet ainsi un affichage quasi instantané sur un PC, d'une anamorphose de la France par régions composée donc de 22 pôles et environ 8000 points de coordonnées pour ses contours. Il faut environ 7 minutes pour déformer la carte des régions européennes à partir de 158 pôles et environ 220 000 points de coordonnées.

Ces méthodes sont sûrement perfectibles, mais l'idée de la déformation par insertion de disques dans une membrane déformable s'est concrétisée ici de manière efficace. Néanmoins elle n'a pu se réaliser qu'après avoir résolu deux problèmes :

1) celui de modéliser correctement le comportement de la membrane soumise à une insertion ou une suppression de disque. Nous avons pour cela construit une transformation polaire vérifiant une propriété d'invariance que nous avons appelé « pseudo-équivalence », permettant une dilatation locale autour du pôle contrôlée par un seul paramètre, sans modification des aires extérieures au voisinage de déformation.

2) celui, plus délicat, du choix de l'opérateur de combinaison des transformations polaires qui respecte à la fois la commutativité (indépendance de l'ordre de combinaison des pôles) et qui soit compatible avec la pseudo-équivalence (respect de la propriété d'invariance de chaque transformation polaire).

## 9 Bibliographie

- Cauvin C., "Des transformations cartographiques", *Mappe-monde*, n°49, vol 1, pp 12-15, février 1998
- Cauvin C., Reymond H., *Nouvelles méthodes de cartographie*, Reclus-La documentation française 1986.
- Kadmon N., Shlomi E.. "A polyfocal projection for statistical surfaces". *The Cartographic Journal*, n°15 vol 1, pp. 36-41, 1978
- Langlois P. Denain J.C., "Anamorphose, analyse d'une métaphore spatiale", *Revue internationale de géomatique*, Vol 7, n°1/1997, pp33-56.
- Langlois P., Denain J.C., "Cartographie en anamorphose", *Mappe-monde*, n°49, vol 1, pp 16-19, février 1998
- Leung Y.K., Apperley M.D., "A Review and Taxonomy of Distorsion-Oriented Presentation Techniques", *ACM Transactions on Computer-Human Interaction*, Vol 1, n°2 June 1994.
- Muller, J.C. "La cartographie d'une métrique non euclidienne : les distances-temps", *L'espace géographique*, n°3, pp 215-227, 1979
- Rockey L., Griffiths W., Roy E., Nethercot D., *The finite Element Method*, Ed. Granada Publishing Ltd, 1975.



Tobler W., *Transformations cartographiques de position, systèmes de projections et anamorphoses*, publications 1959-2000. Textes réunis par C. Cauvin et C. Grasland avec la collaboration de R. Schlumberger, Strasbourg-Paris, avril 2000.

Ce recueil contient en particulier :

- Tobler W.R. The trilateration problem, *notes de lecture*. 8p
- Tobler W.R. Bidimensional regression, A computer program, *geography department, university of California, Santa Barbara*
- Tobler W.R. Pseudo-cartograms, *American Cartographer*, 13, 1 pp. 43-50